# *1 Матрицы и операции над ними*

Прямоугольная таблица, состоящая из *m*  *n*элементов произвольной природы, называется *матрицей.* Матрицы обозначают прописными бук- вами латинского алфавита: *A*, *B*, *C* и т.д. и записывают в виде

 *a*11 *a*12

 *a a*

... *a*1*n* 

... *a* 

 *a*11 *a*12

 *a a*

... *a*1*n* 

... *a* 

*A*  

21 22 2*n* 

или

*A*  

21 22 2*n*  ,

 ... ... ... ...   ... ... ... ... 

 *a a*

... *a* 

*a a*

... *a* 

 *m*1 *m*2

*mn* 

 *m*1 *m*2

*mn* 

Две *матрицы равны*, если равны их размерности и равны соответст- вующие элементы этих матриц.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается *О*.

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется

*квадратной* матрицей.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов, стоя- щих на главной диагонали, равны нулю, *называется диагональной*.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной матрицей* и обозначается *Е*.

*Суммой* матриц *А* и *В* называется матрица *С*, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц *А* и *В*, т.е.

*cij* *aij*

* *bij* , *i*

 1,*m*, *j*

 1,*n* .

Сложение может быть выполнено только для матриц с одинаковой размерностью.

*Произведением* матрицы *А* и действительного числа ** называется матрица *В*, каждый элемент которой равен произведению соответст- вующего элемента матрицы *А* на число **

Матрица *А* называется *согласованной* с матрицей *В*, если число столбцов матрицы *А* равно числу строк матрицы *В*. Например, матрица

*Am**n* согласована с матрицей *Bn**k* .

Умножение матрицы *А* на матрицу *В* может быть выполнено только то- гда, когда матрица *А* согласована с матрицей *В*.

*Произведением* матрицы *Am**n* на матрицу *Bn**k* называется матрица

*Cm**k* , каждый элемент которой *cij* равен сумме произведений элементов

*i*-й строки матрицы *А* на соответствующие элементы *j*-го столбца матри-

*n*

цы *В*, т.е.

*cij*

 *ais*  *bsj* ,

*s* 1

*i*  1,*m*, *j*

 1,*k*.

# *2 Определители*

Основной числовой характеристикой квадратной матрицы является

*определитель* (*детерминант*). Определитель квадратной матрицы обозначают:  , det *A* , *A* .

*Anxn*

Определитель первого порядка матрицы

det *A*  *a*11.

*A*1*x*1 равен ее элементу

*a*11 :

Определитель второго порядка матрицы *A*2*x* 2 записывают в виде

det *A* 

*a*11 *a*21

*a*12 *a*22

и вычисляют по правилу:

det *A* 

*a*11 *a*21

*a*12 *a*22

 *a*11*a*22  *a*12*a*21.

Определитель третьего порядка матрицы *A*3*x*3 записывают в виде

det *A* 

*a*11 *a*21 *a*31

*a*12 *a*22 *a*32

*a*13 *a*23 *a*33

и вычисляют по правилу:

det *A* 

*a*11 *a*21 *a*31

*a*12 *a*22 *a*32

*a*13 *a*23 *a*33

 *a*11*a*22*a*33  *a*12*a*23*a*31  *a*21*a*32*a*13 

 *a*13*a*22*a*31  *a*12*a*21*a*33  *a*32*a*23*a*11.

*Минором* элемента *aij* определителя порядка *n* называется определи- тель порядка (*n–1*), полученный из данного вычеркиванием *i*-й строки и *j*-го столбца.

Минор элемента *aij* обозначают *Mij* .

*Алгебраическим дополнением элемента* aij называется число

*A*  1*i*  *j*  *M* .

*ij ij*

***Теорема Лапласа (теорема разложения)***. Значение определителя равно сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Например, разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки имеет вид:

det *A* 

*a*11 *a*21 *a*31

*a*12 *a*22 *a*32

*a*13 *a*23 *a*33

 *a*11  *A*11  *a*12  *A*12  *a*13  *A*13 

 *a*11

 111  *a*22

*a*32

*a*23 *a*33

 *a*12

 111  *a*21

*a*31

*a*23 *a*33

 *a*13

 111  *a*21

*a*31

*a*22 .

*a*32

# *3 Обратная матрица. Ранг матрицы*

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определи-тель не равен нулю. Для нее существует обратная матрица

*A*1. Спра-ведливо равенство *A*

матрица.

1  *A*  *A*  *A*1  *E* , где *Е* – единичная

Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда матрица *А*

невырожденная.

Обратную матрицу

*A*1 находят по формуле:

*A*1 

1

det *A*

 *A* ,

где матрица

*A* называется *присоединенной* или *союзной* матрицей. *A*

состоит из алгебраических дополнений элементов транспонированной

матрицы *А*. Например, если

 *a*11

*A*   *a*21

*a*12 *a*22

*a*13 



*a*

23

и det *A*  0 , то формула

 

 *a*31 *a*32 *a*33 

 

для *A*1 будет иметь вид:

 *A*11 *A*21 *A*31 

*A*1 

1  *A A A*  .

det *A* 

12 22 32 

 *A*13 *A*23 *A*33 

 

*Элементарными преобразованиями матрицы являются*:

1. транспонирование матрицы;
2. перестановка двух строк (столбцов) матрицы;
3. умножение всех элементов какой-либо строки (какого-либо столб- ца) на число, отличное от нуля;
4. сложение элементов какой-либо строки (какого-либо столбца) с со- ответствующими элементами другой строки (столбца) умноженными на некоторое число.

*Рангом матрицы* называется наивысший порядок отличного от нуля минора.

Элементарные преобразования не изменяют ранг матрицы.

# *4 Системы линейных алгебраических уравнений.*

***Метод Крамера. Метод обратной матрицы***

Система вида:

*a*11*x*1  *a*12*x*2  ...*a*1*nxn*  *b*1;

*a x*  *a x*  ...*a x*  *b* ;

 21 1 22 2 2*n n* 2

 . . . . . . . . . . .



*am*1*x*1  *am*2*x*2  ...*amnxn*

 *bm*.

называется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Чис-

ла *aij* ,

*i*  1,*m*, *j*

 1,*n*

называют коэффициентами системы, числа *bi* –

свободными членами.

 *a*11



*a*

21

*a*12 *a*22

*a*13   *x*1   *b*1 

*a*23    *x*2    *b*2 

или *AX*

 *B* .

     

 *a*31

*a*32

*a*33   *x*3   *b*3 

     

***Теорема.*** Система, состоящая из *n* уравнений и содержащая *n* неиз- вестных, имеет единственное решение тогда и только тогда, когда ос- новная матрица системы является невырожденной, т.е det *A*  0 .

Если выполнены условия теоремы, то решение системы (2) можно найти по *формулам Крамера*:

*x*  1 ;

1 

*x*  2 ;

2 

*x*  3 ,

3 

***Следствие.*** Если det *A*  0 , то система либо несовместна, либо име-ет бесконечно много решений.

*Метод обратной матрицы.*

Рассмотрим систему (2) как матричное уравнение

*A*  *X*  *B* .

Если матрица *А* невырожденная ( det *A*  0 ), то для нее существует

обратная матрица

*A*1. Умножив обе части уравнения *A*  *X*  *B*

на мат-

рицу

*A*1 слева, получим решение этого уравнения:

*A*1  *A*  *X*  *A*1  *B* или *A*1  *A* *X*  *A*1  *B* ,

*E*  *X*  *A*1  *B*

*X*  *A*1*B* .

# *5 Системы линейных алгебраических уравнений. Метод Гаусса.*

***Однородные системы***

***Теорема*** (*Кронекера-Капелли)*. Для того чтобы система линейных ал- гебраических уравнений была совместной, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы.

Решение системы *методом Гаусса* (*методом последовательных ис- ключений*) состоит из двух этапов: прямой и обратный ход метода Гаусса.

Прямой ход метода Гаусса заключается в том, что с помощью элемен- тарных преобразований строк или используя правило «прямоугольника» расширенная матрица системы приводится к ступенчатому виду.

На втором этапе (обратный ход) из системы уравнений, соответст- вующей ступенчатой матрице, последовательно, начиная с последнего уравнения, находят (если это возможно) решение системы.

 *x*  2*y*  *z*  3;



***Пример .*** Решить систему методом Гаусса

2*x*  *z*  1;

 *x*  4*y*  3*z*  15.



***Решение.*** Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду:

 1 2 1 3  1  1 2 1

 

3   1

(2)

 0

2 1

3  3

 2 0 1



1  0

4 3

 

5  

4 3

5  

 1 4 3 15   0 6 2 12  0 3 1 6 



     

 1 2 1

3  4  1

2 1 3 

  0 4 3 5   4 3 5 .



 0

  

 0 0 13 39   0 0 1 



 

3



Система линейных алгебраических уравнений называется *однород- ной*, если все свободные члены этой системы равны нулю.

***Теорема.*** Однородная система, состоящая из *n* уравнений и содер- жащая *n* неизвестных, имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда основная матрица системы вырожденная, т.е. det *A*  0 .

# *6 Собственные значения и собственные векторы матрицы*



Рассмотрим квадратную матрицу

*Anxn*

и вектор-столбец

*Xn*1  0 .

Вектор *X* называется *собственным вектором* матрицы *А*, если суще- ствует такое действительное число **  0 , что выполняется равенство

*AX*  * X* . (3)

Число  называется *собственным значением* или *собственным чис- лом* матрицы *А*.

Для нахождения собственных значений матрицы составляют *харак-*

*теристическое уравнение*:

*A*  * E*

 0 .

Подставляя найденные значения в уравнение (3), находят собственные векторы матрицы *А*.

 0 5 3  *x*1   0 

 0 6 6  *x*2    0  .

    

 0 1 7  *x*3   0 

    

 *m* 

 13*k* 

 3*t* 

**Ответ.** *X*1   0 , *X*2   18*k* , *X*3   3*t* , *m*,*k*,*t*  , *m*  0,*k*  0, *t*  0.

     

 0   9*k*   *t* 

     

**АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

# *7 Векторы в*

2 ***и***

3.

# *Линейная зависимость и независимость*

***векторов. Скалярное произведение векторов***

*Вектором* называют направленный отрезок или упорядоченную пару (тройку) чисел. Векторы, параллельные одной прямой или лежащие на прямой, называются *коллинеарными*. Векторы, лежащие в одной плос- кости или параллельные одной и той же плоскости, называются *компла-*

*нарными*.



*Проекцией вектора AB* на ось *Ox* называется длина отрезка *CD* этой

оси, заключенного между основаниямиперпендикуляров, проведенных из начальной и конечной точек вектора *AB* , взятая со знаком плюс, если

направление отрезка *CD* совпадает с направлением оси проекции и со знаком минус, если эти направления противоположны.

*Проекция вектора на ось* равна длине вектора, умноженной на коси- нус угла между вектором и ось 

*прOx AB* | *AB* | cos**.

Проекции вектора на координатные оси называются *координатами вектора*: *a*  (*x*; *y*;*z*); *AB*  (*xB*  *xA*; *yB*  *y A*;*zB*  *zA* ).



*Линейными операциями над векторами* называют сложение и вычи-

тание векторов, умножение вектора на постоянное число.

  

 Если векторы *a* и *b* заданы своими координатами *a*  (*x*1; *y*1;*z*1),

*b*  (*x*2; *y*2;*z*2 ),

 

то *a*  *b*  (*x*1  *x*2; *y*1  *y*2;*z*1  *z*2 ).

 

Если **  , **  *const* , то *a*  **  **  *a*  (* x*1;*y*1;*z*1), т.е. при умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

 

*Система векторов*

 называется *линейно зависимой*, если

*a*1, *a*2,...,*am*

существуют такие постоянные *c*1, *c*2, ..., *cm* , одновременно неравные ну-

  

лю, что имеет место равенство *c*1*a*1  *c*2 *a*2  ...  *cmam*



 0 . В противном

случае система векторов называется *линейно независимой*. *Скалярным произведением* двух векторов называется число, равное

произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

    

*a*  *b* | *a* |  | *b* | cos**; *a*  *b* | *a* | *пр**b* | *b* | *пр**a*.

*a b*

Скалярное произведение векторов обладает свойствами коммутатив-

   

ности *a*  *b*  *b*  *a* , ассоциативности относительно скалярного множите- ля *ab*  *ab*  *ab* ; дистрибутивности *a* *b*  *c*   *ab*  *ac* 

 

   







 



  

 Если векторы *a* и *b* заданы своими координатами *a*  (*x*1; *y*1;*z*1),

*b*  (*x*2; *y*2;*z*2 ),

то их скалярное произведение равно сумме произведений

 

одноименных координат: *a*  *b*  *x*1*x*2  *y*1*y*2  *z*1*z*2.

# *8 Векторное произведение векторов*

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов с общим началом называется *правой*, если при наблюдении из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден в направле- нии, противоположном направлению движения часовой стрелки. В про-

тивном случае тройка векторов называется *левой*.





 *Ве* *кторным произведением* вектора *a* на вектор *b* называется вектор

*a*  *b* , длина которого численно равна площади параллелограмма, по-

 

 

строенного на этих векторах | *a*  *b* || *a* |  | *b* | sin** , который перпендику-



лярен плоскости векторов *a*

 

 



и *b* и направлен так, чтобы тройка векторов

*a*, *b* , *a*  *b* была правой.

  

Отметим, что

*a*  *b*  0

тогда и только тогда, когда векторы коллинеар-

ны или хотя бы один из них нуль-вектор.

Векторное произведение векторов обладает свойствами антикоммута-

   

тивности *a*  *b*  *b*  *a* ; ассоциативности относительно скалярного мно-

жителя *a*  *b*  *a*  *b*  ** *a*  *b* ; дистрибутивность: *a*  *b*  *c*   *a*  *b*  *a*  *c* .

















 



 

  

 Если векторы *a* и *b* заданы своими координатами *a*  (*x*1; *y*1;*z*1),

*b*  (*x*2; *y*2;*z*2 ),

то их векторное произведение равно

  

*i j k*

 

*a*  *b*  *x*1 *y*1 *z*1 .

*x*2 *y*2 *z*2

***Механический смысл векторного произведения.*** Пусть некоторое твердое тело неподвижно закреплено в точке *А*, а в точке *В* этого тела приложена сила *F* . В этом случае возникает вращающий момент, чис-

ленно равный произведению | *AB* |  | *F* | sin**. В механике его принято

  

называть моментом силы: *M*  *AB*  *F* .

# *9 Смешанное произведение трех векторов*

*Смешанным произведением* трех векторов называется число, которое получится, если первые два вектора перемножить векторно и результат

     

скалярно умножить на третий вектор: (*a*  *b*)  *c*

 *a bc* .

  

Отметим, что смешанное произведение векторов

*a bc*  0

тогда и только

тогда, когда векторы компланарны или хотя бы один из них нуль-вектор.

Свойства смешанного произведения векторов:

1. смешанное произведение не меняется при перемене местами зна-

     

ков векторного и скалярного умножения, т.е. *a*  *b*  *c*  *a*  *b*  *c* ;

1. циклическая перестановка трех сомножителей смешанного произ-

ведения не меняет его значения; нециклическая перестановка сомножи- телей меняет знак произведения на противоположный:

  

        

 

*abc*

 *bca*  *cab*  *bac*   *acb*   *cba* .

  

Смешанное произведение некомпланарных векторов

*a*, *b*, *c*

по моду-

лю численно равно объему параллелепипеда, построенного на векто- рах-сомножителях. Оно положительно, если тройка векторов правая, и отрицательно, если она левая.

   

Если векторы

 

*a* , *b* и *c* заданы своими координатами *a*  (*x*1; *y*1;*z*1),

*b*  (*x*2; *y*2;*z*2 ), лителю

*c*  (*x*3; *y*3;*z*3 ), то смешанное произведение равно опреде-

   *x*1 *a bc*  *x*2

*x*3

*y*1 *z*1

*y*2 *z*2 .

*y*3 *z*3

# *10 Прямая на плоскости*

Виды *уравнений прямой L* на плоскости: 

1. *Ax*  *By*  *C*  0 – общее уравнение прямой, вектор *n* (*A*;*B*)

пер-

пендикулярен прямой и называется ее *нормальным вектором*.

2. *A*(*x*  *x*0 )  *B*(*y*  *y*0 )  0

* уравнение прямой с нормальным вектором

(*A*; *B*), проходящей через точку

*M*0 (*x*0; *y*0 ).

1. *x*  *y*

*a b*

 1 – уравнение прямой «в отрезках», где *а* и *b* величины от-

резков, отсекаемых прямой на осях *Ох* и *Оу* соответственно.

1. *y*  *k*  *x*  *b* – уравнение прямой с угловым коэффициентом *k*  *tg* ,

где ** – угол между прямой *L* и положительным направлением оси *Ox.*

1. *y*  *y*0  *k*(*x*  *x*0 ) – уравнение прямой с угловым коэффициентом

*k*  *tg* , проходящей через точку *M*0 (*x*0; *y*0 ).

6. *x*  *x*0  *mt*,

* параметрические уравнения прямой *L*, где вектор

  *y*

*y*



 0

* *nt*,

*s*  (*m*;*n*) параллелен прямой *L* и называется *направляющим вектором*

прямой, параметр *t*   .

1. *x*  *x*0

 *y*  *y*0

– каноническое уравнение прямой или уравнение

*m n*

прямой с направляющим вектором

*M*0 (*x*0; *y*0 ).



*s*  (*m*;*n*) , проходящей через точку

1. *x*  *x*1 *x*2  *x*1

 *y*  *y*1 *y*2  *y*1

– уравнение прямой, проходящей через две задан-

ные точки

*M*1(*x*1; *y*1) и

*M*2(*x*2; *y*2 ).

*Угол между двумя прямыми* равен углу между их нормальными векто- рами.

1. Пусть прямые

*L*1 и *L*2

заданы общими уравнениями:

*L*1 : *A*1*x*  *B*1*y*  *C*1  0 ,

*L* : *A x*  *B y*  *C*  0 , тогда угол между прямыми

 

2 2 2 2

определяется по формуле:

cos** 

*n*  *n*

  

1 2

| *n*1 |  | *n*2 |

*A*1*A*2  *B*1*B*2 .

Условие перпендикулярности этих прямых:

*A* 2  *B* 2 

1

1

*A* 2  *B* 2

2

2

*A*1*A*2  *B*1*B*2  0 .

Условие параллельности:

*A*1 

*A*2

*B*1 .

*B*2

1. Пусть прямые

*L*1 и *L*2

заданы уравнениями:

*L*1 :

*y*  *k*1*x*  *b*1 и

*L*2 : *y*  *k*2*x*  *b*2 , тогда угол между прямыми определяется по формуле:

*tg* 

*k*2  *k*1 .

1 *k*1*k*2

Условие перпендикулярности этих прямых: *k*1  *k*2  1.

Условие параллельности:

*k*1  *k*2 .

*Расстояние* от точки *M*1(*x*1; *y*1) до прямой *Ax*  *By*  *C*  0 определя-

| *Ax*1  *By*1  *C* |

*A*2  *B*2

ется по формуле *d*  .

# *11 Кривые второго порядка*

Уравнение *x*  *x*

0 0

2  *y*  *y*

2  0

определяет *окружность* радиуса *R*

с центром в точке *C* *x*0; *y*0  .

*Эллипс* с полуосями *a* и *b*

*a*  *b*,

центром в начале координат и фо-

кусами

*F*1 *c*; 0

и *F*2 *c*; 0,

*x*2

*b*2  *a*2  *c*2, *a*  *c y* 2

определяется канониче-

*c*

ским уравнением вида  2  1. *Эксцентриситет эллипса *  ха-

*a*2 *b a*

рактеризует его вытянутость вдоль оси фокусов, 0  **  1. Если **  1, то

*a*  *b* . *Директрисы эллипса* определяются уравнением *x*   *a* .

**

Уравнение эллипса с осями симметрии, параллельными координат-

ным осям, с центром в точке *C* *x*0; *y*0  имеет вид

 *x*  *x*0

*a*2

2 *y*  *y* 2

* *b*2

0

 1.

Каноническое уравнение *гиперболы* с действительной полуосью *а* и мнимой полуосью *b*, с центром в начале координат и фокусами в точках

*F*1 *c*; 0 и

*F*2 *c*; 0 имеет вид

*x*2 *y* 2

2 2



 1, *b*2

 *c*2  *a*2,

*c*  *a*.

*a b*

*Эксцентриситет гиперболы*

**  *c*  1 характеризует вытянутость ос-

*a*

новного прямоугольника гиперболы. *Директрисы гиперболы* – прямые,

перпендикулярные оси фокусов: *x*   *a* . *Асимптоты гиперболы* опре-

**

деляются уравнением: *y*   *b x* .

*a*

*Сопряженная гипербола*, фокусы которой расположены на оси *Оу*, оп-

ределяется уравнением

* *x* 2

*a*2

* *y* 2

*b*2

 1.

Уравнение гиперболы с осями симметрии, параллельными коорди-

натным осям, с центром в точке *C*  *x*0; *y*0  имеет вид

 *x*  *x*0  *a*2

2

 *y*  *y*0 

*b*2

2

 1.

*Парабола* с вершиной в начале координат, симметричная относитель- но оси *Ох*, имеет каноническое уравнение *y* 2  2*px* , где *параметр пара-*

*болы p*  0 равен расстоянию от *фокуса параболы*

*F*  *p* ; 0 

до дирек-

 2 

трисы

 

*x*   *p* . *Эксцентриситет параболы* равен 1.

2

# *12 Плоскость*

*Общее уравнение плоскости* имеет вид



*Ax*  *By*  *Cz*  *D*  0 , где

*n*  (*A*;*B*;*C*) называют *нормальным вектором* плоскости, причем выпол-

няется условие

*A*2  *B*2  *C*2  0 .

Существуют различные способы задания плоскости, выпишем соот- ветствующие им уравнения:

1. *A*(*x*  *x*0 )  *B*(*y*  *y*0 )  *C*(*z*  *z*0 )  0



– уравнение плоскости с извест-

ным нормальным вектором лежащей плоскости.

*n*  (*A*;*B*;*C*)

и точкой

*M*0 (*x*0; *y*0;*z*0 ) , принад-

2. *x*  *y*  *z*  1 – уравнение плоскости в «отрезках», где *а*, *b*, *с* – вели-

*a b c*

чины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях координат,

*b*  0, *c*  0 .

*a*  0,

*x*  *x*1

3. *x*2  *x*1

*x*3  *x*1

*y*  *y*1 *y*2  *y*1 *y*3  *y*1

*z*  *z*1

*z*2  *z*1  0

*z*3  *z*1

* уравнение плоскости, проходящей че-

рез три заданные точки

*Mi* (*xi* ; *yi* ;*zi* ), (*i*  1,2,3) .

Рассмотрим плоскости ** :

*A*1*x*  *B*1*y*  *C*1*z*  *D*1  0 и

** : *A*2*x*  *B*2*y*  *C*2*z*  *D*2  0 .

*Углом между двумя плоскостями * и ** называется угол между их

нормальными векторами:

*A*1*A*2  *B*1*B*2  *C*1*C*2

*A* 2  *B* 2  *C* 2 

1

1

1

*A* 2  *B* 2  *C* 2

2

2

2

cos** 

*n*1  *n*2  .

Условие перпендикулярности плоскостей ** и ** :

 

*n*1  *n*2

 

*n*1  *n*2  0 или *A*1*A*2  *B*1*B*2  *C*1*C*2  0 .

Условие параллельности плоскостей ** и ** :

*A*1  *B*1 *A*2 *B*2

 *C*1

*C*2

 *D*1 .

*D*2

Расстояние от точки *M*1(*x*1; *y*1;*z*1) до плоскости *Ax*  *By*  *Cz*  *D*  0 вы- числяется по формуле:

*d*  | *Ax*1  *By*1  *Cz*1  *D* | .

*A*2  *B*2  *C*2

# *13 Прямая в пространстве. Прямая и плоскость*

1.  *A*1*x*  *B*1*y*  *C*1*z*  *D*1  0,

* общие уравнения прямой в пространстве:

*A x*  *B y*  *C z*  *D*  0

 2 2 2 2

прямая в пространстве определяется как линия пересечения двух плос- костей.

1. *x*  *x*0

 *y*  *y*0

 *z*  *z*0

– канонические уравнения прямой в про-

*m n p* 

странстве с направляющим вектором *s*  (*m*,*n*, *p*)

*x*  *x*0  *mt*,

и точкой

(*x*0, *y*0,*z*0 ) ,

1.  *y*  *y*  *nt*, – параметрические уравнения прямой в пространстве,



0

 *z*  *z*0  *pt*,





где *s*  (*m*,*n*, *p*) – направляющий вектор, *t*   – параметр.

4. *x*  *x*1 

*x*2  *x*1

*y*  *y*1 

*y*2  *y*1

*z*  *z*1 *z*2  *z*1

* уравнения прямой в пространстве, про-

ходящей через две заданные точки *M*1(*x*1, *y*1,*z*1) и *M*2(*x*2, *y*2,*z*2 ) .

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

*L* : *x*  *x*1  *y*  *y*1  *z*  *z*1 ; *L* : *x*  *x*2  *y*  *y*2  *z*  *z*2 .

1 *m*1 *n*1 *p*1 2 *m*2 *n*2 *p*2

cos** 

 

cos(*s*1,*s*2 ) 

 

*s*1  *s*2

*s*1  *s*2 

*m*1*m*2  *n*1*n*2  *p*1*p*2 .

Условие параллельности прямых *L*1

и *L*2 :

*m*1  *n*1 *m*2 *n*2

 *p*1 .

*p*2

Условие перпендикулярности прямых *L*1 и *L*2 : *m*1*m*2  *n*1*n*2  *p*1*p*2  0 .

*m* 2  *n* 2  *p* 2  *m* 2  *n* 2  *p* 2

1

1

1

2

2

1

Угол между прямой *L* : *x*  *x*0

 *y*  *y*0

 *z*  *z*0

и плоскостью

** : *Ax*  *By*  *Cz*  *D*  0

*m n p*

определяется по формуле:

sin** 

| *Am*  *Bn*  *Cp* | .

Условие параллельности прямой *L* и плоскости ** : *Am*  *Bn*  *Cp*  0 .

*A*2  *B*2  *C*2  *m*2  *n*2  *p*2

Условие перпендикулярности прямой *L* и плоскости ** : *A*  *B*  *C* .

*m n p*

Расстояние от точки *M*

до прямой *L* : *x*  *x*0

 *y*  *y*0

 *z*  *z*0

находят

по формуле:

1

 

*d*  | *M*0*M*1  *s* | , где



| *s* |

*m n p*



*s*  (*m*,*n*, *p*) .

Расстояние между скрещивающимися прямыми

*L* : *x*  *x*1  *y*  *y*1  *z*  *z*1 и *L* : *x*  *x*2  *y*  *y*2  *z*  *z*2

можно найти по

1 *m*1 *n*1 *p*1 2 *m*2 *n*2 *p*2



*M*1*M* 2, *s*1, *s*2

 



 



формуле: *d* 

| *s*1  *s*2 |

, где

*M*1  *x*1, *y*1,*z*1,*M*2 *x*2; *y*2; *z*2  .